دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

«تمرین درس دینامیک سازه ها»

مجموعه تمرینات سری پنجم

استاد محترم: جناب آقای دکتر تقی خانی

دانشجو:
سینا کاظم زاده آزاد

شماره دانشجویی: ۸۹۱۲۴۰۶۶

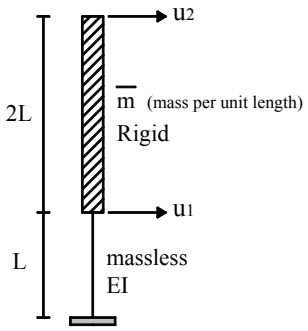
زمان تحویل: ۹۰/۱۰/۳

دانشگاه صنعتی امیرکبیر
دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست

سینا کاظم زاده آزاد شماره دانشجویی: ۸۹۱۲۴۰۶۶

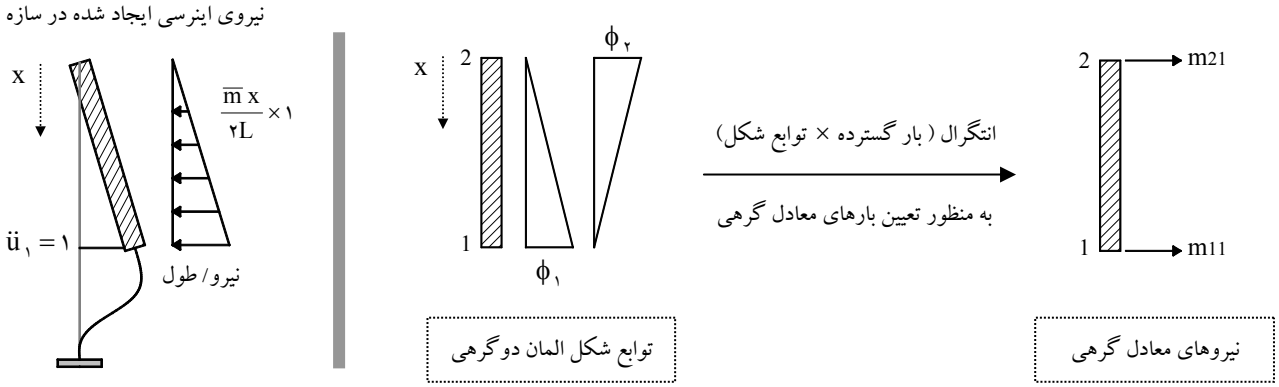
مجموعه تمرینات شماره ۵ درس دینامیک سازه ها: (موعد تحویل: ۹۰/۱۰/۳)

۱) مطلوبست تعیین ماتریس های جرم، نرمی و سختی برای سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده.



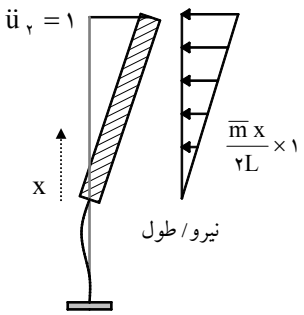
جواب: مطابق شکل مقابل المان صلبی بر روی ستون بی وزنی با سختی (EI) متصل شده است. سیستم توسط دو درجه آزادی مدلسازی شده است. برای تعیین ماتریس جرم، لازم است شتاب واحد در یکی از درجات آزادی اِعمال شده و نیروی اینرسی گرهی ایجاد شده در کلیه درجات آزادی تعیین شود.

برای مثال در شکل زیر شتاب واحد در درجه آزادی شماره ۱ اِعمال شده و نیروی اینرسی ایجاد شده در سیستم نمایش داده شده است. حال مشابه بحث روش اجزاء محدود، برای تعیین نیروهای معادل گرهی ایجاد شده در هرالمان لازم است از **بردار توابع شکل** استفاده شود؛ که برای المان دوگرهی خطی است:



در نتیجه داریم:

$$\begin{bmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{bmatrix} = \int_0^{2L} \frac{\bar{m}x}{2L} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} dx = \int_0^{2L} \frac{\bar{m}x}{2L} \begin{bmatrix} x/2L \\ (2L-x)/2L \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} 2\bar{m}L/3 \\ \bar{m}L/3 \end{bmatrix}$$



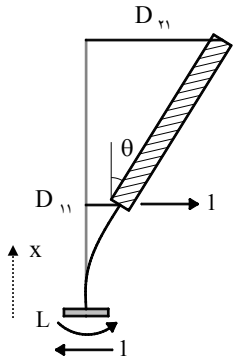
* دقیقاً مشابه حالت قبلی برای تعیین ستون دوم ماتریس جرم شتاب واحد در راستای درجه آزادی دوم اِعمال شده و نیروهای معادل گرهی تعیین می شوند:

$$\begin{bmatrix} m_{۱۲} \\ m_{۲۲} \end{bmatrix} = \int_{o}^{۲L} \frac{\overline{m}x}{۲L} \begin{bmatrix} \phi_{۱} \\ \phi_{۲} \end{bmatrix} dx = \int_{o}^{۲L} \frac{\overline{m}x}{۲L} \begin{bmatrix} (۲L - x)/۲L \\ x/۲L \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} \overline{m}\,L/۳ \\ ۲\,\overline{m}\,L/۳ \end{bmatrix}$$

* در نتیجه در مورد ماتریس جرم سازه دو درجه آزادی فوق داریم:

$$\boxed{\underset{۲\times۲}{\underline{m}} = \frac{\overline{m}\,L}{۳} \begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}}$$

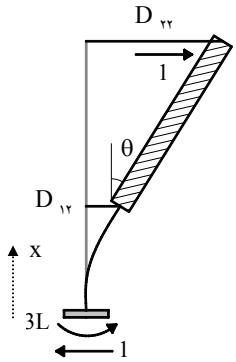
* به منظور تعیین ماتریس نرمی سازه، لازم است بار واحد در یک درجه آزادی اِعمال شده و تغییر مکان سایر درجات آزادی تعیین شود. در ابتدا بار واحد در درجه آزادی اول وارد می شود. از مقاومت داریم:



$$۰ \le x \le L \quad \Rightarrow \quad M = L - x \equiv EI\,y'' \xrightarrow[\text{Bound. Cond.}]{\text{Integrating}} y = \frac{Lx^{۲}}{۲EI} - \frac{x^{۳}}{۶EI}$$

$$D_{۱۱} = y(L) = \frac{L^{۳}}{۲EI} - \frac{L^{۳}}{۶EI} = \frac{L^{۳}}{۳EI} \quad , \quad \theta = y'(L) = \frac{L^{۲}}{EI} - \frac{L^{۲}}{۲EI} = \frac{L^{۲}}{۲EI}$$

$$D_{۲۱} \approx D_{۱۱} + [۲L \times y'(L)] = D_{۱۱} + ۲L\theta = \frac{L^{۳}}{۳EI} + \frac{۲L^{۳}}{۲EI} = \frac{۴L^{۳}}{۳EI}$$



$$۰ \le x \le L \quad \Rightarrow \quad M = ۳L - x \equiv EI\,y'' \xrightarrow[\text{Bound. Cond.}]{\text{Integrating}} y = \frac{۳Lx^{۲}}{۲EI} - \frac{x^{۳}}{۶EI}$$

$$D_{۱۲} = y(L) = \frac{۳L^{۳}}{۲EI} - \frac{L^{۳}}{۶EI} = \frac{۴L^{۳}}{۳EI} \quad , \quad \theta = y'(L) = \frac{۳L^{۲}}{EI} - \frac{L^{۲}}{۲EI} = \frac{۵L^{۲}}{۲EI}$$

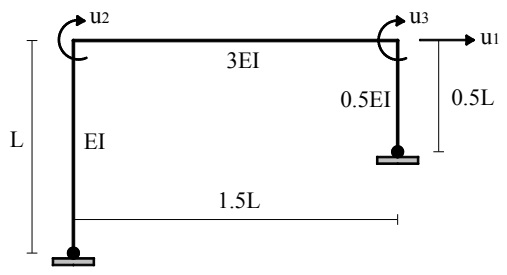
$$D_{۲۲} \approx D_{۱۲} + [۲L \times y'(L)] = D_{۱۲} + ۲L\theta = \frac{۴L^{۳}}{۳EI} + \frac{۱۰L^{۳}}{۲EI} = \frac{۱۹L^{۳}}{۳EI}$$

$$\boxed{\underset{۲\times۲}{\underline{D}} = \frac{L^{۳}}{۳EI} \begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۴ & ۱۹ \end{bmatrix}} \quad , \quad \underset{۲\times۲}{\underline{K}} = \underset{۲\times۲}{\underline{D}}^{-۱} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۳EI}{L^{۳}} \begin{bmatrix} ۱۹ & -۴ \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\underset{۲\times۲}{\underline{K}} = \frac{EI}{L^{۳}} \begin{bmatrix} ۱۹ & -۴ \\ -۴ & ۱ \end{bmatrix}}$$

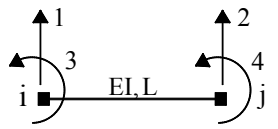
ماتریس نرمی

ماتریس سختی

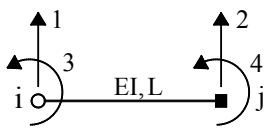
۲) مطلوبست تعیین ماتریس سختی کل برای سیستم دارای سه درجه آزادی نشان داده شده در شکل زیر.



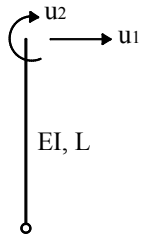
جواب: برای تعیین ماتریس سختی سیستم از مفاهیم روش اجزاء محدود استفاده شده است. با توجه به این که بحث اِعمال شرایط مرزی مطرح نیست، لذا لازم است دو نوع ماتریس سختی مطابق اَشکال زیر در نظر گرفته شود؛ زیرا ستون های قاب یک سر مفصلی می باشند. ماتریس های سختی المان ها در حالت عمومی نوشته شده اند. اکنون لازم است ماتریس سختی هر المان از قاب فوق، بسته به درجات آزادی فعال خود از این ماتریس های سختی حالت عمومی استخراج شود.



$$\underline{K}^{*} = \frac{۲EI}{L^{۳}}\begin{bmatrix} ۶ & -۶ & ۳L & ۳L \\ -۶ & ۶ & -۳L & -۳L \\ ۳L & -۳L & ۲L^{۲} & L^{۲} \\ ۳L & -۳L & L^{۲} & ۲L^{۲} \end{bmatrix}$$



$$\underline{K}^{**} = \frac{EI}{L^{۳}}\begin{bmatrix} ۳ & -۳ & ۰ & ۳L \\ -۳ & ۳ & ۰ & -۳L \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \\ ۳L & -۳L & ۰ & ۳L^{۲} \end{bmatrix}$$



ستون ها: ستون سمت چپ در شکل مقابل نمایش داده شده است. با مقایسه این المان با حالت عمومی ($\underline{K}^{**}$) فوق مشخص می شود که درجات آزادی فعال آن، همان درجات آزادی شماره ۲ و ۴ (ویا سطر و ستون ۲ و ۴) از ماتریس ($\underline{K}^{**}$) می باشند. در نتیجه:

$$\underset{۲\times۲}{\underline{K}}^{\text{Left Column}} = \frac{EI}{L^{۳}}\begin{bmatrix} ۳ & -۳L \\ -۳L & ۳L^{۲} \end{bmatrix} \quad , \quad \underset{۲\times۲}{\underline{K}}^{\text{Right Column}} = \frac{EI}{L^{۳}}\begin{bmatrix} ۱۲ & -۶L \\ -۶L & ۳L^{۲} \end{bmatrix}$$

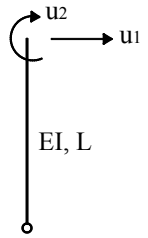
دقت به طول وسختی
ستون سمت راست

(نکته مهم در مورد علامت درایه های ماتریس سختی در صفحه بعد)

نکته بسیار مهم: در ستون سمت چپ قاب، درجات آزادی فعالِ متناظر با ($\underline{K}^{**}$)، درجات آزادی ۲ و ۴ می باشند. با این حال باید توجه داشت که درجات آزادی u_1 و u_2 در خلاف جهت درجات آزادی ۲ و ۴ از ($\underline{K}^{**}$) می باشند، در نتیجه باید در استفاده از درایه های ماتریس ($\underline{K}^{**}$) به علامت ($\pm$) دقت کرد. برای تعیین علامت ($\pm$) هر درایه از ($\underline{K}^{**}$) در هر المان از قاب می توان از روش زیر استفاده نمود:

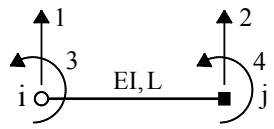
$$\underline{K}^{**} = \frac{EI}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & \text{درجه فعال: خلاف ۲} & & \text{درجه فعال: خلاف ۴} \\ \downarrow & & & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 & 3L \\ -3 & \boxed{3} & 0 & \boxed{-3L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3L & \boxed{-3L} & 0 & \boxed{3L^2} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{درجه فعال: خلاف ۲} \\ \\ \text{درجه فعال: خلاف ۴} \end{array}$$

ستون سمت چپ



المان حالت عمومی

$\underline{K}^{**}$

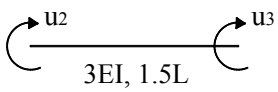


درنتیجه:

$$\underset{2\times2}{\underline{K}}^{\text{Left Column}} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} (-1)\times(-1)\times 3 & (-1)\times(-1)\times -3L \\ (-1)\times(-1)\times -3L & (-1)\times(-1)\times 3L^2 \end{bmatrix} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 3 & -3L \\ -3L & 3L^2 \end{bmatrix}$$

تیر: تیرِ قاب در شکل زیر نمایش داده شده است. با مقایسه این المان با حالت عمومی ($\underline{K}^{*}$) صفحه قبلی مشخص می شود که درجات آزادی فعال آن، همان درجات آزادی شماره ۳ و ۴ (سطر و ستون ۳ و ۴) از ماتریس ($\underline{K}^{*}$) می باشند. در نتیجه با استفاده از درایه های محل تلاقی سطر و ستون ۳ و ۴ و نیز در نظر داشتن نکته نوشته شده در بالای همین صفحه، می توان ماتریس سختی مؤثر تیر قاب را تعیین نمود:

$$\underset{2\times2}{\underline{K}}^{\text{Beam}} = \frac{2\times 3EI}{(1/5L)^3}\begin{bmatrix} 2(1/5L)^2 & (1/5L)^2 \\ (1/5L)^2 & 2(1/5L)^2 \end{bmatrix} = \frac{4EI}{L^3}\begin{bmatrix} 2L^2 & L^2 \\ L^2 & 2L^2 \end{bmatrix}$$



ماتریس سختی کل: پس از تعیین ماتریس های سختی مؤثرِ تیر و ستون های قاب، می توان مشابه روش اجزاء محدود ماتریس سختی کل سیستم را مونتاژ نمود. این عملیات در صفحه بعد انجام شده است.

درجه آزادی

$$\underset{۲\times۲}{K}^{\text{Left Column}} = \frac{EI}{L^۳}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_۱ & u_۲ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۳ & -۳L \\ -۳L & ۳L^۲ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_۱ \\ u_۲ \end{array}$$

$$\underset{۲\times۲}{K}^{\text{Right Column}} = \frac{EI}{L^۳}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_۱ & u_۳ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۱۲ & -۶L \\ -۶L & ۳L^۲ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_۱ \\ u_۳ \end{array}$$

$$\underset{۲\times۲}{K}^{\text{Beam}} = \frac{۴EI}{L^۳}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} u_۲ & u_۳ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۲L^۲ & L^۲ \\ L^۲ & ۲L^۲ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_۲ \\ u_۳ \end{array}$$

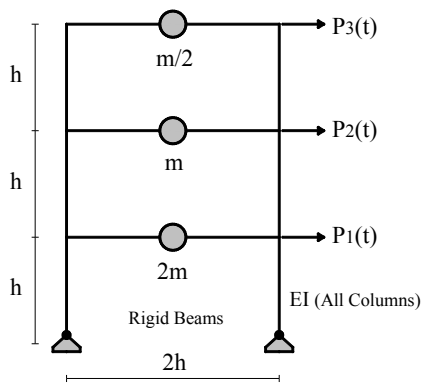
$$\underset{۳\times۳}{K} = \frac{EI}{L^۳}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_۱ & u_۲ & u_۳ \end{array} \\ \begin{bmatrix} ۳+۱۲ & -۳L & -۶L \\ -۳L & ۳L^۲+۸L^۲ & ۴L^۲ \\ -۶L & ۴L^۲ & ۳L^۲+۸L^۲ \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} u_۱ \\ u_۲ \\ u_۳ \end{array}$$

در نتیجه

$$\boxed{\underset{۳\times۳}{K} = \frac{EI}{L^۳}\begin{bmatrix} ۱۵ & -۳L & -۶L \\ -۳L & ۱۱L^۲ & ۴L^۲ \\ -۶L & ۴L^۲ & ۱۱L^۲ \end{bmatrix}}$$

---

۳) مطلوبست تعیین معادله حرکت برای سیستم دارای سه درجه آزادی نشان داده شده در شکل زیر.



جواب: بر اساس فرض مسأله از تغییرشکل محوری المان صرفنظر شده است؛ همچنین تیرها از لحاظ خمشی صلب فرض شده اند. در نتیجه سازه مقابل توسط سه درجه آزادی قابل مدلسازی می باشد. بنابراین بر اساس مطالب ارائه شده در کلاس درس می توان نوشت:

$$k_۱ = ۲\times\frac{۳EI}{h^۳} = \frac{۶EI}{h^۳} \quad , \quad k_۲ = ۲\times\frac{۱۲EI}{h^۳} = \frac{۲۴EI}{h^۳} \quad , \quad k_۳ = ۲\times\frac{۱۲EI}{h^۳} = \frac{۲۴EI}{h^۳} = k \ \text{(Assume)}$$

$$\underset{۳\times۳}{\underline{k}} = \begin{bmatrix} k_۱+k_۲ & -k_۲ & ۰ \\ -k_۲ & k_۲+k_۳ & -k_۳ \\ ۰ & -k_۳ & k_۳ \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} ۱/۲۵ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix} \quad , \quad \underset{۳\times۳}{\underline{m}} = m\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۵ \end{bmatrix}$$

معادله حرکت سیستم:

$$\boxed{m\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰/۵ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{u}_۱ \\ \ddot{u}_۲ \\ \ddot{u}_۳ \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} ۱/۲۵ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۲ & -۱ \\ ۰ & -۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_۱ \\ u_۲ \\ u_۳ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_۱(t) \\ P_۲(t) \\ P_۳(t) \end{Bmatrix}}$$